

Horst H. Figge

RECHNEN MIT DEM PERUANISCHEN ABAKUS –
SPIELEN MIT DEM OBJEKT *DB - 02 MRI*

Versuch einer Rekonstruktion von Regeln

Un objeto arqueológico peruano, obviamente un tablero (de juego), recién ha sido calificado de 'ábaco' (o tabla de cálculo). Esto constituye, para el presente trabajo, el motivo de describir el uso de tablas de cálculo en general y, especialmente, él de la tabla transmitida por Felipe Guamán Poma de Ayala. El vocabulario correspondiente al cálculo indica que los contadores incas usaban piedritas-debe y piedritas-haber. Debido a esta circunstancia, el ábaco peruano era superior al europeo medieval. Con el tablero (de juego) en cuestión no se puede calcular; existen, en cambio, indicios que permitirían la reconstrucción de un modo de usarlo, a manera de un juego de dados.

In einem Aufsatz über Recuay Gaming Boards hat John W. Smith jr. "terraced and compartmentalized objects of stone and wood" beschrieben und abgebildet, die aus peruanischen Funden stammen und bisher unterschiedlich als "models or maps, computers or abacuses, and gaming boards" bezeichnet worden sind (Smith 1977: 111 f.). Er kommt zum Ergebnis, dass es sich dabei um die aus der Literatur bekannten Spielbretter handeln dürfte, und es gelingt ihm, mögliche Spielregeln zu (re)konstruieren.

Im Rahmen der Ausstellung „Peru durch die Jahrtausende“ (1983/84) ist nun neben einigen Quipus auch ein Objekt gezeigt worden, das diesen Spielbrettern entspricht (Abb. 7), nichtsdestoweniger im Katalog „Abakus oder Rechenbrett“ genannt wird (Radicati 1984: 149). Es wird auf ähnli-



che Platten hingewiesen und angedeutet, dass „manchmal die Ansicht vorgetragen (wurde), dass es sich um Spielbretter handelt. Am wahrscheinlichsten scheint es aber, sie als Zählbretter für eine uns nicht mehr bekannte oder nicht mehr rekonstruierbare Zählweise anzusehen“ (Peru 1984: 391).

Diese Meinung ist zunächst einmal aus dem Grund unverständlich, dass Smith jr. (1977) für solche Objekte Spielregeln angegeben hat, andererseits aber Zähl- oder Rechenregeln für solche Objekte offenbar nicht gefunden werden konnten; dass ausserdem das Aussehen des peruanischen Abakus durch Guamán Poma de Ayala (1936: 360) überliefert ist, worauf als erster Henry Wassén (1931) hingewiesen hat. Auch Wassén ist es allerdings nicht gelungen darzulegen, wie mit dem peruanischen Abakus tatsächlich gerechnet worden sein könnte; seine diesbezüglichen Annahmen sind völlig unzureichend – was dazu beigetragen haben dürfte, dass noch immer Spielbretter mit Rechenbrettern verwechselt werden. Es soll im folgenden dargelegt werden, wie mit dem Abakus unter Berücksichtigung der literarischen Quellen und inhärenten Möglichkeiten tatsächlich mit grosser Geschwindigkeit gezählt und gerechnet werden kann und dass mit dem genannten Ausstellungsobjekt aufgrund der in Rudimenten überlieferten Regeln gespielt werden kann.

1. Die Seiten 360/361 der Nueva Corónica

Felipe Guamán Poma de Ayala stellt in seinem um 1600 geschriebenen und gezeichneten Werk den obersten Rechner bzw. Hauptbuchhalter des Inka-Reichs Condor Chaua vor. Auf Seite 360 bildet er einen Mann ab, der ein leeres Quipu in den Händen ausgebreitet hält (Abb. 1); unten links ist ein teilweise vom Überhang verdecktes Rechteck aus viermal fünf Quadranten mit regelmässigen Kreis- bzw. Punktmustern wiedergegeben. Die Überschrift lautet: *Cõtador Maior i Tezorero / Tauantinsuio Quipoc / Curaca Condor Chaua* (Hauptbuchhalter und Schatzmeister, Inkareich-Quipuführer-Herr Condor Chaua).

Seite 361 gibt einen längeren Text ebenfalls teils spanisch, teils quechua (Abb. 2), der nach meiner, von der in der jüngsten, sorgfältig edierten Ausgabe (Guaman Poma 1980 [1]: 333) zu findenden interpretativen nur unwesentlich abweichenden Transkription – nach Auflösung der Abkürzungen – folgendermassen zu lesen ist:

“Contador i Tezorero / Contador Ma / yor de todo este rreyno condor chaua
hijo de a / po – a este le llamauan tauantinsuyo runaqui / poc yncap haziendan
chasquicoc – tezorero / mayor dize que este prencipal tenia grande aui / lidad

para sauer su auilidad el yngo mando / contar y numirar ajustar con los yndios deste / rreyno con la lana del cierbo taruga enpare / xaua con la lana a los yndios – y enparexaua con una / comida llamado quinua contaui la quinua y / los yndios fue muy grande su auilidad mejor fuera / en papel y tinta -- contador mayor hatun hucha / quipoc – contador menor huchuy huchaqui / poc – cuentan en tablas – numiran de cien mil / y de dies mil y de ciento y de dies hasta llegar / a una de todo lo que pasan en este rreyno lo asi / enta y fiestas y domingos y meses y años y en cada ciudad y villa y pueblos de yndios auia estos / dichos contadores y tesoreros en este rreyno y con / taua desta manera comensando de uno dos y tres / suc yscay – quinza – taua – pichica – zoctacan / chis – puzac – yscon – chunga – yscaychungu – quin / zachungu – tauachonga – piscachungu – zoctachungu / canchischungu – pozacchungu – ysconchungu – pachaca / uaranga chungauaranga – huno – pachacahu / no – uaranrangahuno pantacac huno” [das letzte Wort dieser Seite, “taripacoc”, bezieht sich auf den Text der folgenden].

Dies kann man wie folgt übersetzen:

„Buchhalter und Schatzmeister, Hauptbuchhalter dieses ganzen Reichs, Condor Chaua. Sohn eines *apu* (Fürsten). Man nannte ihn *tauantinsuyo runaquipoc yncap haziendan chasquicoc* (Viererland-Menschen-Knotenzähler, Finanznehmer des Inka). Hauptschatzmeister. Man sagt, dass dieser Adlige grosse Fähigkeit besass. Um seine Fähigkeit kennenzulernen, liess der Inka zählen und beziffern, mit den Indianern dieses Reichs abrechnen mit der Wolle des *taruga*, des Hirschs. Er verglich die Indianer mit der Wolle (bildete Paare daraus) und er verglich mit einem *quinua* genannten Nahrungsmittel (ordnete den Indianern Reiskörner zu). Er zählte die *quinua* und die Indianer. Seine Fähigkeit war sehr gross; grösser wäre sie mit Papier und Tinte gewesen. Hauptbuchhalter: hatun huchaquipoc (grosser Schuldenknoter); Zweiter Buchhalter: huchuy huchaquipoc (kleiner Schuldenknoter). Sie rechnen auf Tafeln. Sie zählen nach Hunderttausend, Zehntausend, Hundert, Zehn bis hin zur Eins. Man verbucht alles, was in diesem Reich geschieht: Feiertage, Sonntage, Monate, Jahre. Und in jeder Stadt, jedem Ort, jedem Indianerdorf gab es die besagten Buchhalter und Schatzmeister in diesem Reich. Und man zählte auf folgende Weise, beginnend mit Eins, Zwei, Drei: ...“ [es folgen Quechua-Zahlwörter].

Diesem Text lässt sich also entnehmen, dass es sich bei dem Rechteck auf der Abbildung um einen Abakus im Sinne einer Rechentafel gehandelt hat. Aus der Bezeichnung “*tabla*” geht allerdings ebensowenig wie aus der Zeichnung selbst hervor, dass damit nicht nur eine graphische Struktur, sondern ein Objekt gemeint gewesen ist. Auf dieser Tafel ist offenbar mit Körnern gerechnet worden; die erwähnte Wolle bezieht sich auf das

Quipu. Dem Text ist aber auch über verschiedene Indizien zu entnehmen, dass Guamán Poma die Art, wie die Inka-Buchhalter gerechnet haben, nicht mehr bekannt gewesen ist. Das ist insofern nicht verwunderlich, als das Rechnen mit dem Abakus im europäischen Einflussbereich gegen Ende des 15. Jh. durch das schriftliche Rechnen mit Ziffern völlig verdrängt worden war (Menniger 1958: 102 - 188).

2. *Quipu und Abakus*

Auch andere Autoren sprechen vom Rechnen der Inka, offenbar ohne sich im einzelnen darüber im klaren zu sein, wie dies konkret ausgesehen haben könnte, ja was Rechnen eigentlich an konkreten Operationen beinhaltet. Smith jr. (1977: 116) zitiert Garcilaso de la Vega: "... sumauan restauan, y multiplicauan por aquiellos nudos ..." und Martín de Morúa: "... hacían sus cuentas por piedras y por nudos ..."; und er schreibt: "Leland Locke, Nördenskiöld, and Wassén are all in agreement that the quipu was used primarily for recording not calculating". Mit einem Quipu kann man aber überhaupt nicht rechnen.

Mit Hilfe der Quipus können Zahlen, gegebenenfalls Rechenergebnisse festgehalten werden, genauso wie etwa mit römischen Zahlzeichen. Hier wie dort werden Einheiten fixiert und durch sogenannte Bündelung Einheiten höheren Grades gebildet – in beiden Fällen im Rahmen des Dezimalsystems. Wenn Radicati (1984: 149) in bezug auf gekürzte Quipu-Schnüre meint: „Diese Kappung von Schnüren ist durchaus gebräuchlich und drückt möglicherweise die Rechenoperation der Subtraktion aus“, so verwechselt er die einfache Löschung von Zahlenangaben mit dem rechnerischen Prozess der Subtraktion. Man kann eben beispielsweise von einem neunfach geschlungenen Knoten, der für die Zahl Neun steht, nicht ein Stück abschneiden, um einen achtfach geschlungenen zu erhalten, der für Acht steht. Die Rechnung Neun minus Eins würde am Quipu bedeuten, dass man einen neunfachen Knoten bindet, ihn dann wieder löst, eine Schlinge zurücknimmt und ihn wieder schliesst. Abgesehen von dem immensen Zeitaufwand, den damit einfachste Additionen und Subtraktionen erfordern würden, käme dadurch bald das ganze Stufensystem der Knoten-Bündel durcheinander.

Natürlich können Quipus Rechenhilfen sein, wenn in ihnen z. B. Quadratzahlen oder ähnliche Rechenergebnisse fixiert sind, auf die der Rechner zurückgreifen kann, aber auch mit einer Quadratzahlentabelle kann man nicht Quadratzahlen errechnen. Ein Abakus, gleich wie er im einzelnen funktioniert, ist dagegen keine „Rechenhilfe“, sondern ein „Rechner“, das heisst, man gibt in ihn Zahlenwerte ein und erhält aufgrund

vorgeschriebener Manipulationen die gewünschten Rechenergebnisse; wobei jede Form der Kenntnis von Zwischenergebnissen oder auch Kopfrechnen völlig überflüssig sind. Die erste Forderung an einen Abakus ist die, dass man mit ihm sehr schnell zählen kann (und zwar etwa so schnell wie mit den Fingern). Unüberschaubar vielen oder nicht gleichzeitig vorhandenen Gegenständen, Lebewesen, Ereignissen werden zunächst einzelnen Rechensteinchen (calculi!), -körner, -pfennige zugeordnet. Je nach verwendetem Zahlensystem und Abakussystem werden dann Bündelungen vorgenommen, indem man z. B. für zehn Einheiten eine an einen bezeichneten anderen Ort legt oder schiebt.

Bereits aufgrund dessen lässt sich aussagen, dass Gegenstände mit mehr oder weniger tiefen Löchern sich nicht als Abakus eignen, weil die im Prozess des Rechnens erforderlichen Ersetzungen und Verschiebungen unnötig zeitaufwendig wären. Die aus dem alten Rom, dem europäischen Mittelalter, aus China und Russland bekannten Abakusse (Menniger: 1958) sind entsprechend Muster auf ebenen Tafeln oder Tüchern oder sie bestehen in Drähten oder anderen Führungen für Zählkugeln o. dgl.

Das Addieren erfolgt auf dem Abakus durch Einspeisung beider Summanden mit gleichzeitiger oder anschließender „Bereinigung“, d. h. der Reduzierung der Rechensteine usw. auf das absolut Nötige, wodurch das Ergebnis ablesbar wird. Das Subtrahieren erfolgt entsprechend durch Wegnehmen, gegebenenfalls durch vorherige Auflösung von Bündelungen.

Im Gegensatz zum Spielbrett ist der Abakus ein Gebrauchsgegenstand mit durch die Rechenoperationen definierter Funktion. Deshalb und weil zudem bekannt ist, dass die Inka-Rechner das Dezimalsystem verwendet haben, kann eindeutig ausgesagt werden, ob sich ein Gegenstand zum Abakus eignet und wie ein konkreter Abakus zur Erreichung von Rechenergebnissen manipuliert worden sein muss.

3. Verwendung des Inka-Abakus nach H. Wassén

In seinem Aufsatz "The ancient Peruvian Abacus" (Wassén 1931) schlägt Wassén sicherlich richtig vor, in den einzelnen Reihen des Rechtecks auf Guamán Pomas Abbildung Zehnerbündelungen zu sehen. Daraufhin sieht er – anscheinend geleitet von der Schwärzung einiger der Kreise in den Quadraten – in den Reihen je fünf, drei, zwei, eine Vertiefung. In der linken Kolonne soll jede der fünf Vertiefungen für eine Einheit (Einer, Zehner, Hunderter usw.) stehen. Jede der drei Vertiefungen soll eine Fünfer-Bündelung darstellen, jede der zwei Vertiefungen eine Fünfzehner-Bündelung, jede Vertiefung rechts eine Dreissiger-Bündelung (Abb. 3). Leider gibt Wassén nur ein einziges Rechenbeispiel, nämlich $3 + 3$ (Wassén

1931: 200). Dazu sind zunächst drei Körner in drei der fünf Felder unten links zu legen; daraufhin vom zweiten Summanden zwei dazu; die nun liegenden fünf Körner sind durch eins in einer der drei Vertiefungen des Feldes daneben zu ersetzen; schliesslich ist das restliche Korn in einer der fünf Vertiefungen links zu legen. Wie Wassén aufgrund eines derart umständlichen Verfahrens zur Meinung kommen kann: “By experiment, anyone can satisfy himself that even very complicated operations of addition can be performed with great rapidity by this method”, ist völlig unverständlich.

Anzahlen bis zu fünf Einheiten sind für das menschliche Auge ohne weiteres überschaubar; weshalb also die Körner mühsam in kleine Vertiefungen praktizieren, aus denen man sie dauernd wieder herausholen muss? Wozu braucht man drei Fünfer-Bündelungen, wenn doch zwei schon zur Zehnerbündelung führen? Wozu dienen die zum Rechnen gänzlich überflüssigen Fünfzehner- und Dreissiger-Bündelungen? Wenn schon $3 + 3$ umständlich zu rechnen ist, was an den Fingern oder durch einfaches Zusammenlegen von sechs Steinchen so gut wie keine Zeit beansprucht, welchen Aufwand müsste man etwa bei $18 + 19$ auf sich nehmen! Dabei wäre nicht einmal klar, wie man die Zahl 18 überhaupt legen soll: $3 \times 1 + 1 \times 5 + 1 \times 10$ oder $3 \times 1 + 3 \times 5$ oder $3 \times 1 + 1 \times 15$? Um bei einer solchen Addition nicht völlig durcheinanderzugeraten, müsste man wohl zunächst einmal neunzehn Steinchen haben, um sie nacheinander in die Vertiefungen zu legen und zu vertauschen; denn auf einem solchen Abakus lassen sich ja die Zahlen 18 und 19 nicht einfach parallel hinlegen.

Noch weniger nachvollziehbar ist Wasséns Aussage: “It is perfectly clear that beside addition the rest of the four simple rules of arithmetic may also be carried out on an abacus constructed in this way. In multiplication, for example, the larger of the two factors is marked on the board the number of times that the multiplier indicates. Reduction and the working out of the result is then carried out according to the same principle used in addition” (1931: 200). Tatsächlich würde eine Rechnung wie 18×19 ein überaus kompliziertes, zeitraubendes Problem darstellen, bei dem man – wenn man zwischendurch nicht die Geduld verloren hat – am Schluss keineswegs sicher wäre, ob man sich nicht doch irgendwie verrechnet hat.

Zum Vorhandensein von Fünfzehner- und Dreissiger-Bündelungen bei seinem Rekonstruktionsversuch meint Wassén: “The importance of these squares in chronological computation by for instance setting down 10 years as equalling 3650 days is no doubt self-evident” (1931: 201). Wahrscheinlich denkt er dabei an dreissig Tage eines Monats; was der Hinweis auf 10×365 bedeuten soll, das man in einem Dezimalsystem eigentlich nicht zu „rechnen“ braucht, ist zumindest mir nicht verständlich. Im Sinne des Abakus-Rechnens ist jedenfalls falsch, “that as soon as

it is a question of higher numbers it becomes very difficult to do without rows C and D" (1931: 201); denn das Verfahren ist für Zehnerpotenzen identisch.

Auf der Zeichnung Guamán Pomas sind Schwärzungen der Kreise in allen Kolonnen und Reihen vorgenommen worden; nach Wasséns System würde es sich in der unteren Reihe um $2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 30$ handeln, in der Reihe darüber um $1 \times 10 + 1 \times 50 + 1 \times 150$. Da dies keinen Sinn macht, kommt Wassén zum Schluss: "It is quite likely that the draughtsman merely by way of illustrating an example haphazardly filled in a number of squares without intending to indicate any specified number. He need not himself fully have understood the use of the abacus" (1931: 205).

4. Historische Belege für die Art des Abakus-Gebrauchs in Peru

Es kann mit ziemlicher Gewissheit ausgesagt werden, dass Guamán Poma bereits nicht mehr wusste, wie mit dem von ihm wiedergegebenen Abakus gerechnet wurde bzw. gerechnet werden kann. Der chronologische Prozess war ja sicherlich nicht der, dass Condor Chaua zunächst "enparexaua con la lana a los yndios" und dann erst "enparexaua con ... quinua"; denn gezählt werden musste mit der *quinua*, worauf das Ergebnis erst in die *lana* übertragen werden konnte. Auffällig ist auch, dass die Bemerkung "cuentan en tablas" völlig abgesetzt ist; denn es müsste doch wohl dem tatsächlichen Vorgang entsprechend geschrieben worden sein: *contaua la quinua – en tablas*.

Bei der Angabe, wie die Inka-Rechner zählten, finden sich fünf (spanisch bezeichnete) Dezimalstellen, bei denen unverständlicherweise die Tausend fehlt. Tatsächlich würden die fünf Dezimalstellen zum gezeichneten Abakus passen, wobei die oberen Reihen aber selbstverständlich nicht für Zehn- und Hunderttausend, sondern für Tausend und Zehntausend stünden. Es könnte sich um einen blossen Flüchtigkeitsfehler handeln, wenn nicht in den von ihm genannten Quechua-Zahlen ein ähnlicher Fehler aufträte.

Zunächst gibt Guamán Poma, parallel zu gegenwärtig gebrauchten Zahlen an: *suc* (1), *yscay* (2), *quinza* (3), *taua* (4), *pichica* (5), *zocta* (6), *canchis* (7), *puzac* (8), *yscon* (9); daraufhin für die Zehnerreihe *chunga* (10), *yscay chungu* (20), *quinza chungu* (30) usw. Es folgen *pachaca* (100), *uaranga* (1000) und *chunga uaranga* ($10 \times 1000 = 10000$). Diesem System entsprechend wäre nun für Hunderttausend das Wort *pachaca uaranga* (100×1000) zu erwarten, es folgt aber *huno*. Was immer das bedeuten mag, auf *huno* müsste zunächst einmal *chunga huno* ($10 \times huno$) folgen,

tatsächlich wird als nächstes aber gleich *pachaca huno* ($100 \times \text{huno}$) genannt.

Nun ist im Aymarà (Bertonio: 1879) *hunu* gleich Zehntausend. Guamán Pomas Zahlenreihe würde demzufolge stimmen, wenn anstelle von *chunga uaranga* (10×1000) *huno* (10000) stünde, dann anstelle von *huno* : *chunga huno* (10×10000). Das von ihm daraufhin gegebene *pachaca huno* stünde mit der Bedeutung 100×10000 , also eine Million, an der richtigen Stelle, ebenso das folgende *uaranga huno* als 1000×10000 , als zehn Millionen.

Es darf also angenommen werden, dass Guamán Poma das Wort *huno* (und dessen Gebrauch beim Abakus-Rechnen) kannte, aber aufgrund des hispanisierenden *chunga uaranga* (diez mil) missverstand. Auf dem Hintergrund des Aymarà wird auch verständlich, wie es Guamán Poma unterlaufen konnte, in der spanischen Zehnerreihe, die sich auf den Abakus bezieht, die Zahl Tausend auszulassen. *Uaranga* ist zwar quechua Tausend, aber aimarà (zumindest nach Bertonio) synonym zu *hunu* Zehntausend. Die letzte von Guamán Poma genannte Zahl *pantacac huno*, für die sich aus dem Zusammenhang überhaupt kein Sinn ergibt, weist in dieselbe Richtung; denn *pataca* ist aimarà Hundert. *Pataca hunu* wäre also eine Million, was aus spanischem Denken heraus die höchste benannte Zahl gewesen ist.

Aufgrund dieser Überlegungen kann vermutet werden, dass die Reihen des von Guamán Poma wiedergegebenen Abakus (bzw. die jeweils ersten Einheiten) *suc* (1), *chunga* (10), *pachaca* (100), *uaranga* (1000) und *huno* (10000) geheissen haben.

Nebenbei bemerkt unterläuft auch dem von Smith jr. (1977: 116) zitierten Martín de Morúa ein paralleler Irrtum, wenn er schreibt: "... contaban uno, diez, ciento, un mil, diez cientos, diez mil, diez cientos mil".

Das Rechnen mit dem Abakus ist 1590 von Joseph de Acosta etwas genauer beschrieben worden. Die von Wassén (1931: 205) zitierte Textstelle lautet in der Übersetzung: „... sie eine andere Art von Quipus aus Maiskörnern gebrauchen zu sehen, ist verblüffend; denn für eine sehr schwierige Rechnung -- bei der ein sehr guter Rechner mit Feder und Tinte zu tun hätte, um zu sehen, was jedem zukommt, soviel an Steuern, soviel dort abgezogen und soviel hinzugerechnet mit tausend Umständen -- nehmen diese Indianer ihre Körner und legen eins hier, drei dort, acht Gott-weiss-wo. Sie verschieben ein Korn von hier, vertauschen drei von dort und am Ende kommen sie mit ihrem Ergebnis aufs Genaueste gerechnet und ohne den geringsten Fehler. Und sie wissen viel besser zu berechnen und verbuchen, wieviel jedem einzelnen zu zahlen oder geben bleibt, als wir es mit Feder und Tinte ermitteln können ...“ Es ist hier nicht von besonderen Rechenbrettern o. dgl. die Rede, schon gar nicht

von solchen mit Vertiefungen – die sicherlich erwähnt worden wären, wenn sie beim Rechnen eine Rolle gespielt hätten. Es kann also in der Zeichnung von Guamán Poma ein einfaches graphisches Muster gesehen werden, auf dem allein auch mit der angedeuteten Geschwindigkeit Körner oder Steinchen verschoben und vertauscht werden können.

Die wesentlichste Quelle für das Verständnis des peruanischen Abakus stellt aber wohl das Aymará-Wörterbuch von Bertonio (1612, Facsimile-Nachdruck 1879) dar. Smith jr. zitiert daraus einen einzigen Ausdruck, nämlich “Contar por piedrecitas” (1977: 115). Wassén nennt einige mehr, ohne jedoch die entscheidenden Schlussfolgerungen daraus zu ziehen (1931: 197).

Dem ersten Teil des Wörterbuchs (Bertonio 1879, I: 139, 367) ist zu entnehmen:

“Contar por piedrecitas: Calana apanocatha, iranocatha, saraatha, vel inocatha.”

“Piedra cuenta para contar lo que de deue: Cchaara. Para lo q̄ se ha pagado: Hanko. Contar con ellas: Iranocatha, Apanocatha.”

Daraus ergibt sich die anscheinend bisher unbeachtet gebliebene Tatsache, dass im Gegensatz zum römischen und mittelalterlich europäischen Abakus in Peru mit zwei verschiedenen Rechensteinen gerechnet worden ist, nämlich Soll- und Haben-Steinen. Darin liegt, wie gezeigt werden wird, ein ganz entscheidender Vorzug; um nur einen zu nennen: es war völlig gleichgültig, ob Ergebnisse positive oder negative Zahlen enthielten. Dem zweiten Teil (II: 22, 32, 72, 88, 89, 174, 178, 240, 241, 270) ist zu entnehmen:

“Cala: Piedra.”

“Apa Nocatha: Poner abaxo.”

“Iranocatha: ... Poner en el suelo, o abaxo.”

“Inocatha: ... Poner algo en alguna cosa ... Contar con piedras. Calaro inocama.”

In diesen Worterklärungen kann eine Bestätigung dafür gesehen werden, dass das Abakusrechnen auf dem Boden stattfand.

“Cchaara: ... Negro ... Piedrecita de contar lo que se deue dela tassa, y otras cosas ... Lo q̄ se deue dela tassa.”

“Pacacaa; vel hanko; Cosa blanca.”

Das heisst also, dass weisse Steinchen als Habensteine, schwarze als Sollsteine verwendet wurden; entsprechend wäre selbstverständlich an verschiedenfarbige Körner zu denken oder an Rechensteine mit verschiedenfarbigen oder verschieden geformten Seiten.

Zwei weitere Aymará-Wörter, die von Bertonio genannt werden, geben Aufschlüsse über die Bündelung; leider sind die Übersetzungen nicht völlig eindeutig:

“Paa vel Paya: Nombre numeral, Dos ...”

“Paachatha: Hazer vna cosa dos vezes, aunque no en todas cosas. Cosco paachatha: Dos vezes he ydo al Cuzco. Cala paachatha: Poner dos piedras en la cuenta, quando no ay mas de vna.”

“Phisca: Nombre numeral, Cinco ...”

“Phiscachatha: Poner cinco en la cuenta quando la hazen por piedrecitas.”

Von letzterem ausgehend, kann angenommen werden, dass der Abakus ein Feld für die Zahl Fünf enthielt, d. h. ein Stein auf ihm bedeutete Fünf. Demzufolge müsste es ein Feld für die Zahl Zwei gegeben haben. Beides passt zur unten dargestellten Art, den Abakus zu verwenden. Allerdings lässt sich die Formulierung der Bedeutung von paachatha nicht nur so verstehen, dass ein Stein (auf ein Zweierfeld) für zwei und damit für die Zahl Zwei gelegt wurde, sondern auch so, dass anstelle eines Steins (z. B. auf einem Zehnerfeld) zwei (dann auf das Fünferfeld) gelegt wurden.

Bei einer weiteren entsprechenden Formulierung ist kein Hinweis auf das Rechnen gegeben, sie betrifft dementsprechend wohl auch anderes:

“Chhokhta: Seys numero.”

“Chhokhtachatha: Cumplir hasta el numero de seys.”

5. Rechnen mit dem Inka-Abakus

Es ergibt sich aus dem Gesagten folgende Ausgangslage. Die Zeichnung von Guamán Poma stellt einen Abakus dar, auf dem mit zwei Arten von Körnern oder Steinen gerechnet werden konnte. Da keine der Quellen von Vertiefungen o. dgl. berichtet, ist davon auszugehen, dass es sich um ein graphisches Muster auf ebener Fläche gehandelt hat. Die Kreismuster in den Quadraten sind demzufolge mit der grössten Wahrscheinlichkeit als Zahlzeichen anzusehen, nämlich von rechts nach links für Eins, Zwei, Drei, Fünf. Ob diese Zeichen so bereits von den Inka-Rechenmeistern verwendet worden sind oder vom spanisch schreibenden Guamán Poma den Würfel- und Domino-Zahlen nachgebildet wurden, sei dahingestellt. Die Schwärzungen verschiedener Stellen dürften in Unkenntnis vorgenommen worden sein, zumindest aber keine Beziehung zum Rechnen besitzen. Entsprechend dem Dezimalsystem der Zahlen und der Zahlennotierung auf den Quipus dürfte es sich bei den Reihen gleicher Zahlzeichen um

Dezimalbündelungen handeln. Das heisst, dass ein Rechenstein auf dem Feld rechts unten für die Zahl Eins (bzw. minus Eins) stand, auf dem Feld daneben für Zwei, auf dem Feld darüber für Zehn (Abb. 4).

Das Zählen mit einem solchen Abakus ging folgendermassen vor sich. Eins: Ein Stein ins rechte untere Feld; Zwei: diesen Stein nach links verschoben; Drei: erneut nach links verschoben; Vier: ein zusätzlicher Stein auf das rechte untere Feld; Fünf: beide Steine weggenommen und durch einen links unten ersetzt; Sechs: zusätzlich einen Stein auf das rechte untere Feld; Sieben: diesen nach links verschoben; Acht: diesen erneut verschoben; Neun: einen zusätzlichen Stein rechts unten ($9 = 5 + 3 + 1$); Zehn: alle Steine weggenommen und einen rechts auf das zweite Feld von unten gelegt; Elf: einen ins rechte untere Feld dazulegen usw. Auf diese Weise lässt sich schnell jede beliebige Anzahl abzählen, wobei für jede Dezimalstelle maximal drei Steine erforderlich sind.

Das Fehlen eines Feldes für die Zahl Vier, die deshalb als Drei plus Eins gelegt werden muss, ist Voraussetzung für das jeweils notwendige rasche Verschieben. Schon die äussere Form der Zeichen in den Feldern bei Guamán Poma beweist das vorgeschlagene Vorgehen; denn die drei Kreise sind als zwei plus einer, die fünf als drei plus zwei gezeichnet. Andererseits ist aber auch klar, dass bereits für einen minimal geübten Rechner die Markierung der einzelnen Felder völlig überflüssig ist bzw. dass auch gleichgültig ist, ob die Felder irgendein anderes beliebiges Muster tragen.

Bei einiger Übung kann man auf einem solchen Abakus Zahlen durch Steine etwa mit derselben Geschwindigkeit notieren wie mit Ziffern auf Papier. Bei manchen geht es schneller (z. B. 5000 verlangt das Legen eines Steins), bei manchen etwas langsamer (z. B. 999 verlangt das Legen von dreimal drei Steinen). Jedenfalls lassen sich alle Zahlen bis 99999 auf diesem Abakus etwa parallel zum Aussprechen der entsprechenden Worte markieren.

Das Addieren besteht nun im einfachen Hinlegen aller Summanden mit anschliessender Bereinigung, sofern diese notwendig ist. Zur Addition $15 + 52$ beispielsweise legt man einen Stein auf das Fünfer-, einen auf das Zehnerfeld, dann einen auf das Zweier- und einen auf das Fünfzigerfeld; das Ergebnis ist direkt als 67 ablesbar und gegebenenfalls in Knoten eines Quipus übertragbar. Die Addition $18 + 19$ stellt einen etwas umständlicheren Vorgang dar, bei dem mehrere Bereinigungsschritte erforderlich sind (Abb. 5).

Man kann sich spasseshalber einen Wettkampf zwischen einem Inka-Rechenmeister und einem durchschnittlichen europäischen Rechner vorstellen, bei dem der erste die Aufgaben vorgibt und fortwährend gewinnt. Die Summe $5123 + 351 + 1015$ legt der eine mit elf Steinen etwa in derselben Zeit, in der der andere die Zahlen zu Papier bringt. Wenn letzte-

rer dann zu rechnen beginnt, hat der Inka-Rechenmeister schon das Ergebnis: denn er braucht ja nur abzulesen: sechs Tausender, vier Hunderter, acht Zehner, neun Einer.

Die Subtraktion kann zum einen durch schlichtes Wegnehmen vorgenommen werden, wozu allerdings selbstverständlich nötigenfalls Bündelungen aufzulösen sind (z. B. $10 - 5 = 2 \times 5 - 1 \times 5$). In entsprechender Weise wurde mit dem europäischen Abakus gearbeitet. Nun stellt aber der Gebrauch von Soll- und Haben-Steinen eine ganz wesentliche Vereinfachung der Subtraktion dar, insofern als eben auch negative Zahlen auf den Abakus gelegt werden können. Theoretisch kann man beliebig viele beliebig grosse positive und negative Zahlen in beliebiger Reihenfolge durch Steine markieren und in einem einzigen Bereinigungsvorgang u. U. sehr schnell zu einem positiven oder negativen Ergebnis kommen. Man muss nur jeweils auf einem Feld befindliche gleiche Anzahlen positiver und negativer Steine wegnehmen und schliesslich alle Steine einer Art vom Abakus beseitigen.

In einem Wettkampf könnte ein Inka-Rechenmeister die Rechnung $5123 - 1415 + 351 - 5074 + 1015$ nur gewinnen; denn er würde die Zahlen mit schwarzen und weissen Steinen auf den Abakus legen und sähe das Ergebnis Null auf einen Blick, weil auf jedem Feld mit einem schwarzen auch ein weisser Stein zu liegen käme (Abb. 6).

Bei Multiplikationen mit dem Abakus muss im Prinzip ein Faktor so oft gelegt werden, wie der andere angibt; anschliessend wird bereinigt, d. h. es werden die Doppelbelegungen von Feldern beseitigt und für ein ablesbares Ergebnis gesorgt. Bei der Multiplikation mit Zehn wird man selbstverständlich den betreffenden Faktor nicht zehnmal legen, sondern nur einmal und dann alle Steine um ein Feld nach oben verschieben. Die Rechnung von beispielsweise 51×23 führt man also so durch, dass man je zwei Steine auf das Fünfziger- und das Einer-Feld legt, alles um ein Feld nach oben verschiebt ($\times 10$) und dann noch je drei Steine auf Fünfziger- und Einer-Feld hinzugibt, um dann alles zu bereinigen.

Für den geübten Rechner ergibt sich aus den zwei Rechensteinarten der Vorteil, dass er z. B. Neun als Zehn minus Eins legen kann. Bei Multiplikationen z. B. mit Neun braucht man dann nicht je neun Steine zu legen, sondern nur je zwei, nämlich je einen um ein Feld verschoben und einen in der anderen Farbe. Von entscheidender Bedeutung sind die beiden Rechensteinarten bei der Division.

In Umkehrung der Multiplikation muss bei der Division der Divisor so oft vom Dividenden weggenommen werden, bis sich Null oder ein zu kleiner Rest ergibt; die Anzahl der möglichen Wegnahmen stellt den Quotienten dar. Das heisst konkret, dass man z. B. bei $51 : 23$ die Zahl 51 in einer Rechensteinart hinlegt, 23 in der anderen dazugibt, bereinigt, erneut

23 negativ hinzulegt, bereinigt; Ergebnis ist 2, weil vom Rest 5 nicht ein drittes Mal abzuziehen ist. Selbstverständlich wird man auch bei der Division die weiteren genannten Vereinfachungen einsetzen. Es ist z. B. bei $51 : 2$ nicht fünfundzwanzigmal eine Zwei zu legen, vielmehr legt man zwei negative Steine auf das Zweierfeld und verschiebt sie um ein Feld nach oben (oder man legt gleich zwei aufs Zwanziger-Feld); es bleiben dann elf positive Einheiten (ein Zehner, ein Einer) liegen, so dass man den Zehner noch durch zwei negative Steine auf dem Fünfer-Feld beseitigen kann; Ergebnis: $2 \times 20 + 2 \times 5$ Rest 1, also 25.

6. Das Spielbrett Ica DB-02 MRI

Beim anfangs erwähnten Ausstellungsobjekt handelt es sich um eine aus einem Wal-Wirbelknochen gefertigte Tafel ($41 \times 29 \times 5$ cm) mit symmetrisch angeordneten Vertiefungen in zwei verschiedenen Grössen (Abb. 7). Radicati, der das Objekt als „Abakus oder Rechenbrett“ bezeichnet, schreibt zu einem Foto: „Wir besitzen eine grössere Zahl von Zählbrettern aus Stein. Welche Rechenoperationen durchgeführt worden sind, ist unbekannt. Angesichts der spärlichen Angaben über Schrift- und Zählssysteme können wir darüber leider nur Vermutungen anstellen“ (1984: 149).

Nun sind natürlich die grundlegenden Rechenarten kulturunabhängig; zumindest müsste man mit einem Rechenbrett zählen und addieren können. Es ist aber nicht vorstellbar, wie dies mit dem Objekt DB-02 MRI möglich sein soll. Ausserdem dürften sich nirgendwo Rechenmeister eines grundsätzlich anderen Zahlensystems bedient haben als dem in ihrer Muttersprache vorgegebenen. Das heisst, wenn das Objekt irgendetwas mit Rechnen zu tun gehabt haben sollte, müsste es wohl Hinweise auf das Dezimalsystem enthalten oder ein solches wenigstens zulassen. Das ist hier offensichtlich aber nicht der Fall.

Das Objekt ist diagonal symmetrisch; es enthält im Mittelband in insgesamt sieben Kolonnen abwechselnd drei kleinere und eine grössere Vertiefung, ausserdem unten von links, oben von rechts beginnend je fünf kleine Vertiefungen (Abb. 8). Von Vertiefungen ist anscheinend in den historischen Quellen zum Rechnen bzw. zur Rechentafel nirgendwo die Rede, wohl aber in denen, die sich auf (Würfel-)Spiele beziehen. Es bietet sich direkt an, die Anordnung der vertieften Felder so zu verstehen, dass zwei gegnerische Parteien von beiden Seiten her Steine gegeneinander bewegt haben; wobei die seitlichen „Häuser“ als Start- oder Zielpositionen gedient haben dürften, die kleinen nur je einen Stein oder eine überschaubare Anzahl aufnahmen, die grossen dagegen mehrere oder eine unüberschaubare Anzahl.

Das Objekt entspricht weitgehend den von Smith jr. abgebildeten und besprochenen "Recuay Gaming Boards", die allerdings eine andere Zahl und Anordnung der Vertiefungen aufweisen. Smith jr. gibt einige Aussagen über indianische Spiele auf Spielbrettern mit Vertiefungen wieder (1977:118). Ohne speziell auf die Spielbretter einzugehen, zitiert auch Roswith Hartmann in "Juegos de velorio en la Sierra ecuatoriana" Murua (Hartmann 1980: 226) und Cobo (Hartmann 1980: 266) mit Hinweisen darauf.

Hartmann berichtet von eigenen Beobachtungen eines zeremoniellen Spiels, bei dem "se utiliza un tablero cortado de forma más o menos rectangular de una hoja de cabuya, en cuya superficie se hallan cavados 29 huecos por los cuales los jugadores avanzan ... de acuerdo al número de puntos marcados al echar el dado" (1980: 229).

Es seien im folgenden einschlägige Hinweise im bereits verwendeten Aymará-Wörterbuch von Bertonio (1879, II: 92, 110, 157, 163, 271) zusammengestellt:

"Halancola: Los agujeros o hoytos de vn juego assi llamado q̄ algo se parece al delas tablas"

"Halancolasitha vel Halancolatha: Jugar a este juego"

Damit ist also ein Name für die in Frage stehenden Objekte überliefert, der sich als wissenschaftliche Bezeichnung anbietet: *Halancola*; und es ist klar, dass damit gespielt wurde.

"Huncusitha: Jugar como ala tagua con vn dado grande de madera adelantando vnas piedrecitas en sus casas o hoyos, lo mismo que halancolatha"

Zumindest eine Version des *Halancola*-Spiels wurde also mit einem Würfel gespielt, der hier mit der "*Tava*" verglichen wird, einem gegenwärtig noch bei den Gauchos beliebten zweiseitigen Knöchelwürfel (s. u.). Die Verwendung von Würfeln ist auch archäologisch belegt (Smith jr. 1977: 120).

"Huayrusitha, Piscasitha: Jugar cō vnas piedrecillas adelantandolas en sus hoytos, segun los p̄tos de vna manera de dado gr̄ade, en vnos destos juegos van adelantando las piedras alderredor o en circulo, en otros dando buelta como rio & c."

Es kann hier kaum von etwas anderem die Rede sein als von den Objekten, zu denen auch das hier besprochene gehört. Die Auskünfte über ihren Gebrauch als Spielbretter sind so präzise, und zwar in einem Wörterbuch, in dem ebenso präzise Angaben zum Rechenbrett zu finden sind, dass gegenteilige Argumentationen schon aus diesem Grund unmöglich erscheinen.

“Chunca: Tagua de madera para jugar.”

“Chuncasitha, Piscasitha: Jugar ala tagua, que aca es de madera.”

“Chuncaasitha, Marccaasitha: Perder a este juego.”

“Chuncajasitha: Vencer.”

“Phisca: Nombre numeral, Cinco ... Es tambien vn dado de palo, con que juegan como ala taua.”

“Phiscasitha: Jugar con el.”

Die Würfelnamen *chunca* und *phisca* bezeichnen wie *tagua/tava/tabá* anscheinend nicht durchgängig eine bestimmte Würfelform; sie stehen ausserdem anscheinend auch für mehrere verschiedenartige Spiele (Hartmann 1980: 226 f, 263, 266). Bemerkenswert ist, dass alle drei Würfelnamen mit Zahlwörtern in Beziehung stehen (*čunka* = 10, *pičqa* = 5, *tawa* = 4), die sich ihrerseits zum Abakus von Guamán Poma in Verbindung bringen lassen. Zehn ist die erste Bündelung, die in die zweite Reihe führt; sie entspricht damit auf niederer Ebene der Eins. Fünf ist die höchste Bündelung, die in der ersten Reihe möglich ist. Vier ist die Anzahl der Kolonnen und bezeichnet ausserdem die als Bündelung fehlende Zahl zwischen Drei und Fünf. Interessanterweise lässt sich auch der im *huairu*-Spiel verwendete Würfelausatz aus Maiskörnern auf das Abakus-Rechnen beziehen: Es werden dazu nämlich helle Maiskörner auf einer Seite durch Feuer geschwärzt und dann geworfen (Hartmann 1980: 231). In Aimará-Termini hätten sie also, entsprechend den beiden Arten von Rechensteinen, eine *cchaara*- und eine *hanko*-Seite. (i. e. Soll und Haben).

Es soll nun zum Schluss eine Möglichkeit angegeben werden, wie mit dem Objekt DB-02 MRI gespielt werden kann. Die von Smith jr. entwickelten Regeln (1977: 120 ff) lassen sich – unabhängig von der Frage, inwieweit sie den Eigentümlichkeiten der anderen Spielbretter gerecht werden – auf dieses Brett nicht übertragen.

Spielmöglichkeit: Gewürfelt wird mit einem Würfel mit vier markierten Seiten, denen entsprechend jeweils ein Stein ins Spiel gebracht und ins erste, zweite, dritte kleine Haus oder das erste grosse gelegt wird oder aber es wird ein Stein um die betreffende Häuserzahl weiterbewegt. In jedem der kleinen Häuser dürfen nur bis zu zwei gleiche Steine (d. h. einer Partei) liegen, in den grossen beliebig viele Steine beider Parteien. Stösst ein Stein auf ein Haus, in dem sich ein gegnerischer Stein befindet, wird dieser aus dem Spiel gestossen und muss von vorn beginnen; ein Haus mit zwei Steinen dagegen ist vom Gegner nicht einnehmbar. Ziel ist, die fünf Häuser seitlich am jeweiligen Ende (in die der Gegner nicht gelangen kann) mit je zwei Steinen zu belegen.

Diese Spielregel orientiert sich natürlich an europäischen Brettspielen nach der Art des *Mensch-ärgere-dich-nicht*. Sie stimmt aber zumindest im

Hinblick auf den grundsätzlichen Vorgang mit der Regel des Huairu-Spiels überein, die R. Hartmann und U. Oberem von einem Gewährsmann in Ecuador erfahren haben (1968: 244 f). Die von ihm gemachten Angaben beziehen sich allerdings im wesentlichen auf den Würfel; sie können, was das „Spielbrett“ betrifft, unmöglich vollständig sein. Dieses hätte nämlich lediglich die Funktion des Addierens von gewürfelten Punktzahlen, wozu man kein Spielbrett mit bestimmtem Muster und verschiedenen grossen Häusern benötigt. Auch die steinernen Spielbretter haben verschiedene grosse Häuser, deren unterschiedliche Funktion bei Rekonstruktionsversuchen oder der Beurteilung der Richtigkeit/Vollständigkeit angegebener Regeln zu beachten ist.

Die steinernen Spielbretter besitzen zudem in verschiedenen Ebenen angelegte Häuser (s. a. Bankmann 1981: 40), deren Herstellung einen so grossen Mehraufwand verlangt hat, dass in irgendeiner Form wohl auch die Höhe an sich eine Bedeutung gehabt haben dürfte, die also nicht einfach durch andersartige Markierung erreichbar gewesen wäre.

LITERATURVERZEICHNIS

Bankmann, Ulf

- 1981 „Zwei Skulpturen aus dem Callejón de Huaylas, Peru, im Museum zu Basel.“
In *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel*. 92: 39 - 46,
Basel.

Bertonio, Ludovico

- 1879 *Vocabulario de la lengua aymara*. Facs., Bände/tomos I, II; Leipzig.

Guamán Poma de Ayala, Felipe

- 1936 *Nueva Corónica y Buen Gobierno*. (Codex péruvien illustré), Facs., Paris.

- 1980 *El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno*. Edición crítica de John V. Murra y Rolena Adorno ... (3 tomos). I, México (D. F.).

Hartmann, Roswith

- 1980 “Juegos de velorio en la Sierra ecuatoriana.” In *Indiana* 6: 225 - 274, Berlin.

Hartmann, Roswith, und Udo Oberem

- 1968 „Beiträge zum ‚Huairu-Spiel‘.“ In *Zeitschrift für Ethnologie* 93: 240 - 259,
Braunschweig.

Menninger, Karl

- 1958 *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen.

Peru durch die Jahrtausende.

- 1984 *Peru durch die Jahrtausende. Kunst und Kultur im Lande der Inka*. [Katalog zur Ausstellung Schaffhausen 1984], Recklinghausen.

Radicati di Primeglio, Carlos

1984 „Die Quipu des Regionalmuseums in Ica.” In: Peru ... 1984: 147 - 150.

Smith jr., John W.

1977 “Recuay Gaming Boards. A Preliminary Study.” In *Indiana*, 4: 111 - 137, Berlin.

Wassén, Henry

1979 “The ancient Peruvian Abacus.” In: Nordenskiöld, Erland (Ed.): *Comparative Ethnological Studies*, 9: 189 - 205 [Göteborg 1931], Reprint, New York.

ABBILDUNGEN

Abb. 1 Seite 360 der Nueva Corónica von Guamán Poma

Abb. 2 Seite 361 der Nueva Corónica von Guamán Poma

Abb. 3 Deutung der Abakusfelder durch H. Wassén

Abb. 4 Neue Deutung der Abakusfelder

Abb. 5 Die Rechnung $18 (A) + 19 (B) = 37$

Abb. 6 Die Rechnung $5123 (A) - 1415 (B) + 351 (C) - 5074 (D) + 1015 (E) = 0$

Abb. 7 Die Felder auf dem Objekt DB-02 MRI

Abb. 8 Vorgeschlagener Spielweg auf dem Objekt DB-02 MRI

CŌTADOR·MAJOR·ITEZORERO
 TAVANTIS·SVIO·QVIPOC
 CYRACA·COM·DOR·CHAVA



con tabor y teponales

con tador

Abb. 1

CONTADOR I TESORERO CONTADOR MA

yor de to do este reyno con dor chava hijo de a
 po- aeste le llamaian tauantiri suyo runa qui
 poc yncap hazien dan chasqui coc- tezoreo
 mayor dize qe este principal teniagen de au
 lidad para sauer su auilidad el yngo mando
 contar y numizar ajustar contos yns des te
 reyno- con la lana del cerbo- taruga enpare
 xaua cõ la lana a los yns: y enpare xaua con una
 comisa llamado quinua contaua la quinua y
 los yns fue muy grande su auilidad mejor fue ca
 en papel y tinta- contador mayor hatun hucha
 quipoc- contador menor huchuy hucha qui-
 poc- uentan en tablas- numizan de cien mil
 y de diez mil y de ciento y de diez hasta llegar
 a una de to solo que pasan en este reyno lo au
 enta y fiestas y domingos y meses y años y e
 cada ciudad y villa y pueblos deys aua a estos
 ghos conta dores y tesoreros en este reyno y cõ
 taua des tamera comensando de uno dos y tres
 sue- yscay- quinza- taua- pichica- zocta- can
 chis- puzac- yscay- chungu- yscaychungu- qui
 za chungu- tauachunga- pscachunga- zoctachunga
 canchischunga pozachunga- yscachunga- pachaca
 uaranga- chunguaranga- huno- pachacahu
 no- uararanga huno- pan tacac huno
 taupaoc

○ ○ 50 000 ○ ○	○ ○ 30 000 ○ ○	○ ○ 20 000 ○ ○	○ ○ 10 000
○ ○ 5 000 ○ ○	○ ○ 3 000 ○ ○	○ ○ 2 000 ○ ○	○ ○ 1 000
○ ○ 500 ○ ○	○ ○ 300 ○ ○	○ ○ 200 ○ ○	○ ○ 100
○ ○ 50 ○ ○	○ ○ 30 ○ ○	○ ○ 20 ○ ○	○ ○ 10
○ ○ 5 ○ ○	○ ○ 3 ○ ○	○ ○ 2 ○ ○	○ ○ 1

Abb. 4

○ ○ 5×10 000 ○ ○	○ ○ 3×50 000 ○ ○	○ ○ 2×15 000 ○ ○	○ ○ 300 000
○ ○ 5×1 000 ○ ○	○ ○ 3×5 000 ○ ○	○ ○ 2×15 000 ○ ○	○ ○ 30 000
○ ○ 5×100 ○ ○	○ ○ 3×500 ○ ○	○ ○ 2×1 500 ○ ○	○ ○ 3 000
○ ○ 5×10 ○ ○	○ ○ 3×50 ○ ○	○ ○ 2×150 ○ ○	○ ○ 300
○ ○ 5×1 ○ ○	○ ○ 3×5 ○ ○	○ ○ 2×15 ○ ○	○ ○ 30

Abb. 3

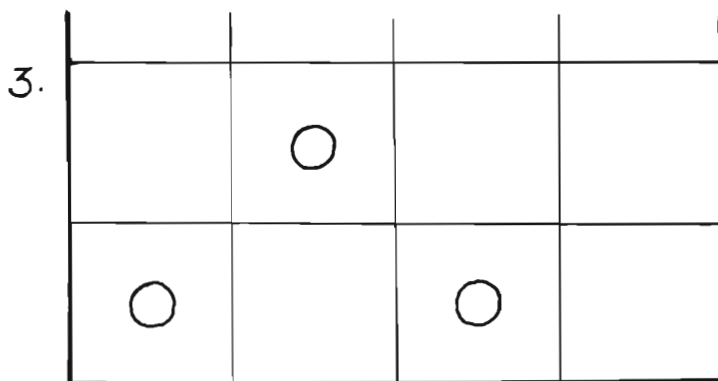
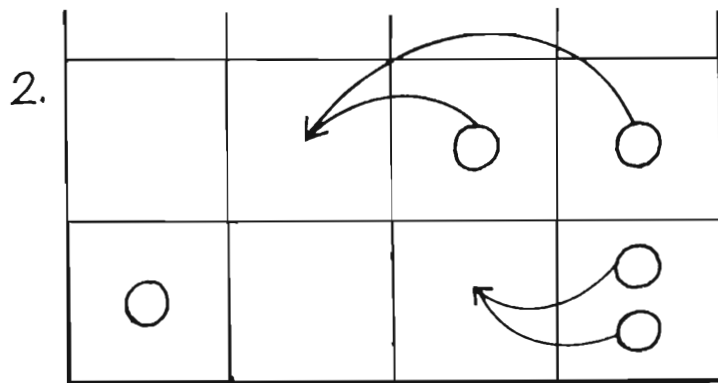
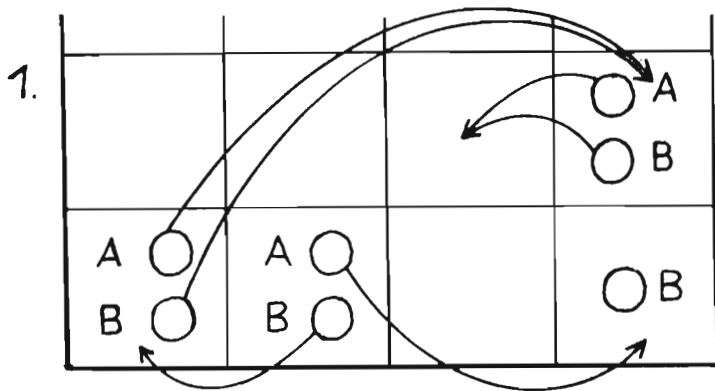


Abb. 5

○ A ● D			● B ○ E
	○ C ● B		○ A ● B
○ C ● D		○ A ● D	● B ○ E
● B ○ E	○ A ● D		○ C ● D

Abb. 6

